

國立嘉義高中 113 學年度學術性向資賦優異【數理類】複選評量—數學能力評量試題

說明：請將答案寫在答案卷上。若答案為分數，請化成「最簡分數」或「最簡根式」。每題答案須全對才給分。

填充題：每題 5 分，共 20 題，共 100 分。

1. 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ABC : \angle C : \angle BAC = 1:2:5$ ，且 $\overline{BD} \perp \overline{AC}$ 於點 D ，求 $\angle ABD =$ _____。

2. 已知函數 $f(x)$ 滿足 $f(a+b) = f(a)f(b)$ ， $f(0) \neq 0$ ， $f(1) = 1$ ，求 $\frac{f(2)}{f(1)} + \frac{f(3)}{f(2)} + \frac{f(4)}{f(3)} + \dots + \frac{f(2024)}{f(2023)} =$ _____。

3. 若函數 $g(x) = 1 - x^2$ ， $f(g(x)) = \frac{2-x^2}{x^2}$ ，求 $f(\frac{3}{4}) =$ _____。

4. 周長為 30，各邊長均不相等且都是整數的不全等三角形，共有_____個。

5. 設 k 為一整數。已知 $\frac{k}{3} < \sqrt{7+\sqrt{47}} < \frac{k+1}{3}$ ，則 $k =$ _____。

6. 有一數列 $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}, \frac{3}{4}, \frac{2}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{5}{5}, \dots$ ，依此規則類推，則此數列的前 113 項總和為_____。

7. 方程式 $x^2 - 7x + 10 = |4x - 14|$ 的解 $x =$ _____。

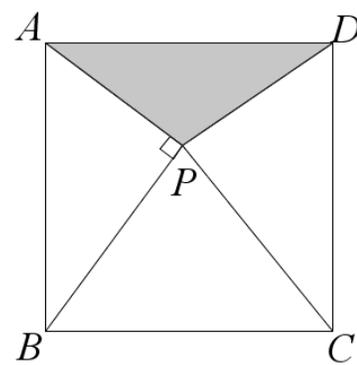
8. 化簡 $(\frac{1}{10 \times 12} + 1) \times (\frac{1}{11 \times 13} + 1) \times (\frac{1}{12 \times 14} + 1) \times (\frac{1}{13 \times 15} + 1) \times \cdots \times (\frac{1}{111 \times 113} + 1) =$ _____。

9. 若 $x + y = 12$ ，則 $\sqrt{x^2 + 4} + \sqrt{y^2 + 9}$ 的最小值為 _____。

10. 在 $\triangle ABC$ 中，點 D 為 \overline{AB} 的中點， $\angle ACB = 135^\circ$ ， $\overline{CD} \perp \overline{AC}$ ，求 $\sin A =$ _____。

11. 已知函數 $f(x) = 2x^4 + 8x^3 + 9x^2 + x + 1$ ，則 $f(-1 + \sqrt{3})$ 值為 _____。

12. 如右圖所示， P 是正方形 $ABCD$ 內部一點，且 $\angle APB = 90^\circ$ ， $\overline{AP} = 2$ ，則 $\triangle APD$ 的面積為 _____。

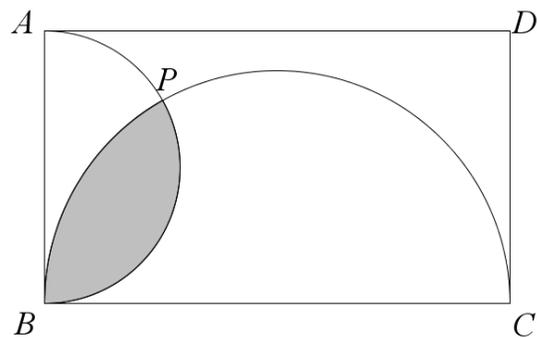


13. 三數 a 、 b 、 c 滿足 $ab + a + b = bc + b + c = ca + c + a = 3$ ，求 $(a+1)(b+1)(c+1) =$ _____。

14. 已知 $x + y = 4$ 且 $xy = 1$ ，則 $x^2 + x^3 + y^2 + y^3 =$ _____。

15. $f(x) = 1 - x^2 + \sqrt{9 - x^2}$ 的最大值為 M ，最小值為 n ，則 $M + n =$ _____。

16. 如右圖所示，長方形 $ABCD$ 中， $\overline{AB} = \sqrt{6}$ ， $\overline{AD} = 3\sqrt{2}$ ，若以 \overline{AB} 、 \overline{BC} 為直徑劃半圓且交於 P 點，求兩個半圓重疊區域（灰色區域）面積為_____。



17. 設 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_9$ 是公差為 1 的等差數列，其中 $a_1 \neq 0$ 且 $a_3 > 0$ 。若 a_3, b, a_9 三數依序也成等比數列，其中 b 為 a_4, a_5, a_6, a_7, a_8 其中一數，則 $a_9 =$ _____。

18. 已知 a, b, c 為質數，且 $\begin{cases} a + b + c = 112 \\ ab + bc + ca = 2921 \end{cases}$ ，若 $a < b < c$ ，則 $c =$ _____。

19. 數列 a_n 滿足 $a_{n+1} = a_n + f(n+1)$ ，其中 n 是正整數且 $f(x)$ 為二次函數。若 $a_1 = 2$ 、 $a_2 = 1$ 、 $a_3 = 3$ 、 $a_4 = 10$ ，則 $a_5 =$ _____。

20. 如右圖所示， $\triangle ABC$ 為一等腰直角三角形，其中 $\angle BAC = 90^\circ$ ， $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ 且 $\overline{BD} = \overline{BC}$ ，求 $\angle CDB =$ _____。

