國立嘉義高中 114 學年度學術性向資賦優異【數理類】複選評量—數學能力評量試題

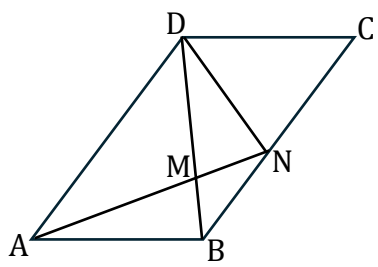
填充題 100 分，每格 5 分，請按題號將答案填寫在答案卷上。

1. 設 k 為整數，且滿足$\sqrt[3]{2025}<k<\sqrt{2025}$，這樣的 k 有_____個。

2. 將 2025 的所有正因數從大到小排成一列，形如 F_1、F_2、F_3、.....，則 $F_3-F_4=$_____。

3. 將二次函數 $y=2(x+1)^2+5$ 以平行直線 $y=x$ 的方向往右上方移動 $4\sqrt{2}$單位長，此二次函數移動後的頂點座標為_____。

4. 如右圖，在平行四邊形 ABCD 中，M 為對角線$\overline{BD}$上的一點，且 $\overline{MD}=3\overline{BM}$，直線 AM 與 $\overline{BC}$ 交於 N 點。則三角形 MND 面積與平行四邊形 ABCD 面積的比值為_____。



5. 已知數列$\langle a_n\rangle$滿足：$\begin{cases}a_1=2\\a_{n+1}=(a_n)^2+a_n\end{cases}$，n 為正整數，試問 a_{2025} 除以 10 的餘數為_____。

6. 設 x、y 為自然數，函數 f(x,y)滿足兩條件 $\begin{cases}f(x,y)=f(x+1,y-2)\\f(x,0)=x\end{cases}$，則 f(2025,114)=_____。

7. 設 $f(x)=\dfrac{3x}{2x-1}$，試計算下列各題。

   (1) f(x)+f(1−x)的值為_____。

   (2) 利用(1)的結果計算 $f(\frac{1}{115})+f(\frac{2}{115})+f(\frac{3}{115})+....+f(\frac{113}{115})+f(\frac{114}{115})=$_____。

8. 已知對任意實數 a 皆滿足$(\sqrt[3]{a})^3=a$，則滿足方程式$\sqrt[3]{5x+2}=5x+2$ 的三個相異實根的總和為_____。

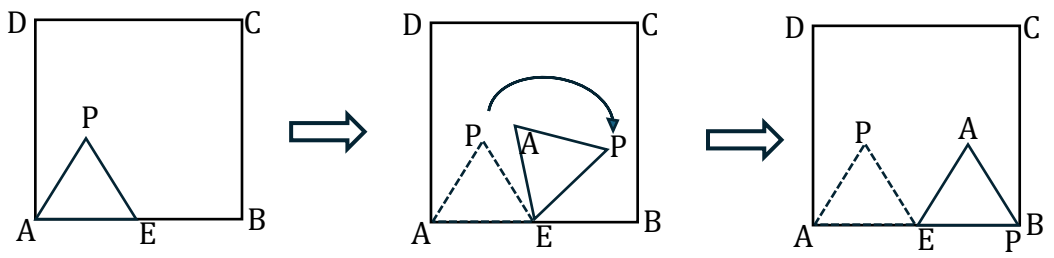
9. 已知$2^{14}+1=p\times q\times r$，其中 p、q、r 皆為質數且 p<q<r，試求 r 的值=_____。

10. 有一個面積為 120 的正六邊形。每次選擇正六邊形中的三個頂點，然後寫下這三個頂點所構成的三角形之面積。請問寫下的所有三角形中，其中為直角三角形的面積總和是_____。

11. 把數字 1,1,1,1,1 和 2,2,2 任意排列，我們將連續的相同數字畫一底線定義為一個「連串」，例如 12212111 畫記為 $\underline{1}\,\underline{22}\,\underline{1}\,\underline{2}\,\underline{111}$，其連串數是 5。又如 $\underline{1}\,\underline{222}\,\underline{1111}$ 的連串數是 3。現在將八個 1 和四個 2 任意排列後，連串數為 3 的排法有_____種。

12. 有一等差數列，其前 17 項的「奇數項和」比「偶數項和」多了 150；前 50 項的「奇數項和」比「偶數項和」多了 200，則此數列的首項為_____。

13. 如下圖(i)，ABCD 是邊長為 4 的正方形，△APE 是邊長為 2 的正三角形，其中 E 在$\overline{AB}$上。首先以 E 點為中心順時鐘旋轉△APE 使得 P 點與 B 點重合(過程如下圖(ii)(iii))，接著以 P 為中心延著正方形的邊再作相同的轉動兩次後使得原本的 E 點與 C 點重合。試問此過程中 P 點移動的總長度為_____。



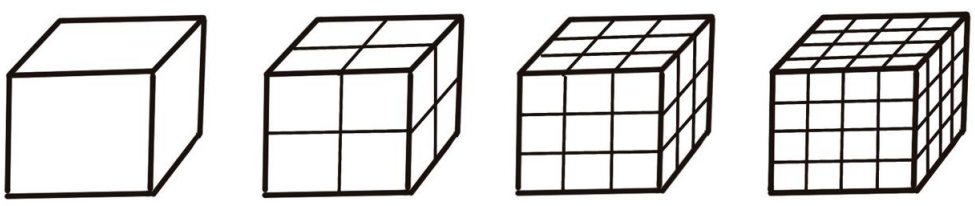
圖(i)　　圖(ii)　　圖(iii)

14. 二次函數 $f(x)=ax^2+bx+c$，其中 a、b、c 為實數且 a>0，若 $|f(0)|=|f(1)|=|f(2)|=1$，則 f(x) =_____。

15. 老師觀察某日班上同學午休情形，發現正在睡覺的同學的人數等於沒在睡覺同學的人數的$\frac{7}{8}$再加$\frac{7}{8}$，又發現如果正在睡覺的同學有一半醒過來的話，此時沒在睡覺的同學的人數會介在 25 到 65 個人之間，試問班上共有_____人。

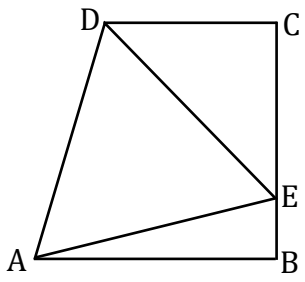
16. 某液晶面板由紅、綠兩種顏色的 LED 燈泡組成。已知各色燈泡亮燈的循環規律如下：
紅色：「亮 1 秒，再暗 2 秒」
綠色：「亮 3 秒，再暗 1 秒」
若在中午 12 點整這兩種顏色的燈泡同時各自開始作上述循環，並設各燈泡亮、暗切換的時間極短可被忽略，則從中午 12 點到下午 1 點這段時間內有_____秒面板是暗的。

17. 如下圖，有一塊正立方體 a_1，對此正立方體分割成 8 塊相同的小正方體令為 a_2；分割成 27 塊相同的小正方體令為 a_3；分割成 64 塊相同的小正方體令為 a_4，以此類推。若將其表面六面皆塗上顏色，發現 a_n 的小正方體中，六面皆無著色的塊數除以 10 餘 3，而有一面著色的塊數與有兩面著色的塊數比值大於 5 且小於 11，試問 n=_____。

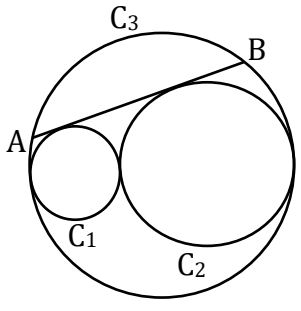


a_1 a_2 a_3 a_4

18. 如右圖，梯形 ABCD 中，∠B=∠C=90°，$\overline{AB}=\overline{BC}=6$，且△AED 為正三角形，若△AED 的面積為$m\sqrt{3}-n$，其中 m、n 為自然數，則 m+n=_____。



19. 如右圖，三圓 C_1、C_2、C_3 的半徑分別為 3、6、9，且三圓兩兩相切，$\overline{AB}$為 C_3 的一弦且與 C_1、C_2 外切，則 $\overline{AB}$ =_____。



試題結束