國立嘉義高中 104 學年度學術性向資賦優異【數理類】複選暨高瞻班甄選測驗

數學實作評量試題

一　、填充題：每格 5 分，共 90 分。

1. 已知 $f(x)$ ， $g(x)$ 分別是實係數偶函數與奇函數，且 $f(x)+g(x)=x^3+x^2+1$ ，則 $f(2)-g(2)=$ ____________ 。

2. 設 $a^{3x}=\sqrt{2}+1$ ，則 $\dfrac{a^{5x}+a^{-x}}{a^{2x}+a^{-4x}}=$ _________ 。

3. 若 a,b 為實數，且滿足 $ab=2$ ， $a^3+b^3=9$ ，則 $a+b=$ ________ 。

4. 設 $f(x)=x^4+2x^3+3x^2+2x+1$，求 $f(1.02)$ 的近似值到小數點後第二位為______。(小數點第三位以下四捨五入)

5. 設 a , b 均為不等於 1 的正數，且滿足 $a^x=b^y=a^{-3}b^5$ ， 求 $(x+3)(y-5)$ 之值__________ 。

6. 試解不等式： $3(x-2)^{99}(x+1)^{105}(x^2-x+1)\le(x-2)^{99}(x+1)^{107}$ ； 答：___________________。

7. 已知 $x>0$ ，若函數 $f(x)=\dfrac{x^2+2x+4}{x}$ ，在 $x=m$ 時，有最小值 n，則數對 $(m,n)=$ ___________ 。

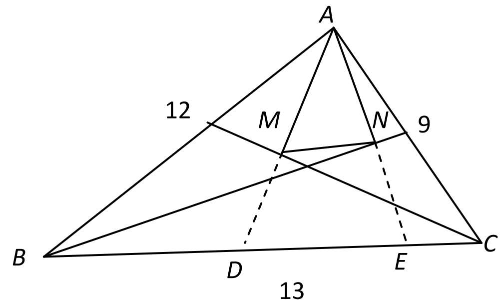
8. 設 p、q、r、s 為相異複數， $f(x)=x^4-2x^3-2x^2+5x+6$ ，已知 $f(p)=f(q)=f(r)=f(s)=7$，
   則 $(1+p)(1+q)(1+r)(1+s)=$ __________ 。

9. 已知 n 為正整數，若 $\dfrac{1}{\sqrt{20-2\sqrt{96}}}<\dfrac{n}{8}<\dfrac{1}{\sqrt{28-16\sqrt{3}}}$ ，且 $\dfrac{n}{8}$ 為最簡分數，則 $n=$ ________。
   (參考資料 $\sqrt{2}\approx 1.414$ ， $\sqrt{3}\approx 1.732$)

10. 在 ΔABC 中，已知 $\overline{AB}=12$ ，$\overline{AC}=9$ ，$\overline{BC}=13$ ，

自 A 點分別作 $\angle B, \angle C$ 平分線的垂線，垂足分別為 N , M 點，

試問 ΔAMN 與 ΔABC 面積的比值為____________。



11. 設 x 為實數，$f(x)=(5^{-x}+3)^2+(5^x+3)^2-1$ ，當 $x=\alpha$ 時，$f(x)$ 有最小值 β ，求數對 (α,β) =__________。

12. 若實係數方程式 $x^4-8x^2+12x+k=0$ 的所有根中，有兩根之和為 2，則 k 之值為__________ 。

13. 設 $f(x)=ax^2+bx+c$ ，$a>0$ ，已知對任意實數 t ，恆使 $f(t+1)=f(3-t)$ 。若實數 k 滿足 $f(3k)<f(2k+4)$ ，

則 k 的範圍為____________ 。

14. 某多項式 $f(x)$ 以 $x(x-1)$ 除之餘式為 $ax+3$；以 $x(x+1)$ 除之餘式為 $-3x+b$ ；以 x^2-1 除後的餘式為 $cx+4$，

試求 $f(x)$ 被 $x(x^2-1)$ 除後的餘式____________。

15. 已知方程式 $\dfrac{2^{-x}}{x}=(\dfrac{1}{8})^6$ 的實根在兩整數 n 與 $n+1$ 之間，則 $n=$______ 。

16. 測驗理論上的羅許模式是說：能力 x 的學生作難度為 a 的試題，其答對率 $P(x)$ 為 $P(x)=\dfrac{2^{x-a}}{1+2^{x-a}}$ 。

某研究機構將一道難度為 a 的數學問題進行測驗，結果發現：能力 0.5 的學生答對率為 $\dfrac{1}{3}$ 。

試根據羅許模式，求若此道數學問題對能力 x 的學生答對率為 $\dfrac{3}{5}$，則 x 的值為__________

(以四捨五入法取到小數第一位，已知 log 2≒0.3010, log 3≒0.4771)。

17. 若 $x>y>2$ ，且 $a=2^{\frac{x+y}{2}}$ ， $b=\dfrac{2^x+2^y}{2}$ ， $c=\log_2\dfrac{x+y}{2}$ ， $d=\sqrt{\log_2 x\cdot\log_2 y}$ ， $e=\dfrac{\log_2 x+\log_2 y}{2}$ ，

則 a,b,c,d,e 的大小關係為________________ 。

18. 若 $\dfrac{3y^2-4y+4}{x^2-2x+3}=\dfrac{3y^2+4y+4}{x^2+2x+3}$ ，且 $2x\neq 3y$ ，則 $xy=$_______ 。

二、多重選擇題：至少一個正確選項，每題 5 分，只錯一個得 3 分，錯兩個得 1 分，

錯三個或以上不給分，共 10 分。

1. 設 $f(x)$ 為實係數二次多項式，且已知 $f(1)>0$ 、 $f(2)<0$ 、 $f(3)>0$ 。令 $g(x)=f(x)+(x-2)(x-3)$ ，

請選出正確的選項______________。

(A) $y=f(x)$ 的圖形是開口向上的拋物線

(B) $y=g(x)$ 的圖形是開口向上的拋物線

(C) $g(1)<f(1)$

(D) $g(x)=0$ 的 兩 根 在 1 與 3 之 間

(E) 若 α 為 $f(x)=0$ 的最小實根，則 $g(\alpha)<0$

2. 設 $g(x)=x^3+ax+2$ 及 $h(x)=x^2+mx+n$ 為兩個正整係數多項式，而且已知方程式 $f(x)=g(x)\,h(x)=0$，

至少有一個有理根，且有一個虛根 $x=-1+2i$。請選出正確的選項：_______________ 。

(A) $m+n=5$

(B) $f(x)=0$ 恰有兩個虛根

(C) $f(x)$ 除以 $x+3$ 的餘式是 -224

(D) $f(x)$ 除以 x^2+2x+4 的餘式是 $x+10$

(E) 至少存在一實數 α ，使得當 $x>\alpha$ 時，$f(x)$ 的函數值恆大於 0